Matemática financeira

Eduardo Palhares Júnior

9 de agosto de 2019

1 Capitalização simples e composta

$$J = C \times i$$

$$M = C + J$$

1.1 Capitalização simples

$$J = C \times i \times n$$

1.2 Capitalização composta

$$J = C \times (1 + i)^n$$

2 Desconto simples e composto

$$D = C \times d$$

$$A = N - D$$

2.1 Desconto simples

2.1.1 Comercial ou bancário (por fora)

$$D_{cs} = N \times d \times n$$

$$A_{cs} = N(1 - d \times n)$$

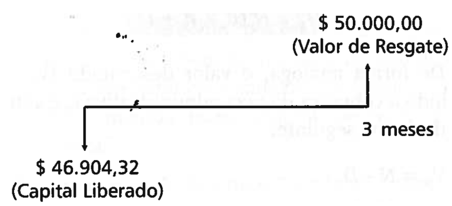
2.1.2 Racional (por dentro)

$$D_{rs} = \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n}$$

$$A_{rs} = \frac{N}{1 + i \times n}$$

Exemplo Admita uma operação de deconto de um título de $R\$50.000,00$ realizada por uma empresa pelo prazo de 3 meses. O banco cobra uma taxa de desconto de $2,2\% a.m.$. Faça uma analise da operação pelas metodologias de desconto racional vs desconto comercial.

Desconto racional
Valor nominal: $50.000,00$
Valor liberado: $V_{rs} = \dfrac{N}{1 + i \times n} = \dfrac{50.000}{1 + 0,022 \times 3} = \dfrac{50.000}{1,066} = R\$46.908,32$



$$i = \left[(1,066)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \times 100 = 2,15\% \text{ a.m.}$$

Desconto comercial
Valor do desconto:

$$50.000,00 \times 0,022 \times 3 = R\$3.300,00$$

Valor liberado: $50.000,00 - 3.300 = R\$46.700,00$

O crédito liberado ao tomador pelo desconto bancário é menor, explicado pela incidencia dos juros sobre o valor de resgate do título. Com isso, a taxa efetiva é maior.

$$\frac{50.000,00}{46.700,00} - 1 = 0,07066 ou 7,066\% \text{a.t.}$$

$$i = \left[(1,0766)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \times 100 = 2,30\% \text{ a.m.}$$

2.2 Desconto composto

2.2.1 Comercial ou bancário (por fora)

$$A_{cc} = N(1-d)^n$$

$$D_{cc} = N\left[1-(1-d)^n\right]$$

2.2.2 Racional (por dentro)

$$A_{rc} = \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$D_{rc} = N\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

2.3 Exemplo comparativo

Sejam um título de $R\$200,00$ cujo resgate será em 90 dias e a taxa de juros é de 10% ao mes. Faça o calculo utilizando todos os tipos de desconto.

- O desconto simples está associado a taxa de juros simples
- O desconto composto está associado a taxa de juros composto
- O desconto comercial é calculado sobre o valor nominal
- O desconto racional é calculado sobre o valor atual

2.3.1 Comercial simples

$$Dcs = 200 \times 0,10 \times 3$$
$$Dcs = R\$60,00$$

$$Vcs = 200(1-0,10\times 3)$$
$$Vcs = R\$140,00$$

2.3.2 Racional Simples

$$Drs = \frac{200\times 0,1\times 3}{(1+0,10\times 3)}$$
$$Drs = R\$46,15$$

$$Vrs = \frac{200}{(1+0,10\times 3}$$
$$Vrs = R\$153,85$$

2.3.3 Comercial composto

$$Dcc = 200\left[1-(1-0,10)^3\right]$$
$$Dcc = R\$54,20$$

$$Vcc = 200(1-0,10)^3$$
$$Vcc = R\$145,80$$

2.3.4 Racional Composto

$$Drc = 200\left[1-(1+0,10)^-3\right]$$
$$Drc = R\$49,74$$

$$Vrc = \frac{200}{(1+0,10)^{-3}}$$
$$Vrc = R\$150,26$$

Tabela 1: Comparação entre os métodos

R$ 200,00	Comercial	Racional
Simples	R$ 60,00	R$ 46,15
	R$ 140,00	R$ 153,85
Composto	R$ 54,20	R$ 49,74
	R$ 145,80	R$ 150,26

3 Equivalência de taxas

$$i_d = \left[(1 + i_a)^{\frac{n_d}{n_a}} - 1\right] \times 100$$

$$\begin{aligned} i_a &= \text{ taxa atual} \\ i_d &= \text{ taxa desejada} \\ n_a &= \text{ prazo atual} \\ n_d &= \text{ prazo desejado} \end{aligned}$$

Exemplo: Suponha que queremos converter uma taxa de 6% ao semestre em uma taxa bimestral

$$\begin{aligned} i_d &= \left[(1 + 0,06)^{\frac{2}{6}} - 1\right] \times 100 \\ &= \left[1,06^{\frac{1}{3}} - 1\right] \times 100 \\ &= [1,01961282 - 1] \times 100 \\ &= 0,01961282 \times 100 \\ &\therefore \\ &\approx 1,96128224\% \end{aligned}$$

4 Séries de pagamentos

4.1 Termos vencidos

$$V_p = P\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n \cdot i} \tag{1}$$

$$V_f = P\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \tag{2}$$

Exemplo Foi feita a aquisição de um empréstimo consignado para entrada na compra de um imóvel, no valor de R\$50.000,00 em 24 parcelas iguais e com taxas de juros de 20% ao ano. Na mesma semana ocorreu uma promoção salarial, gerando um excedente de R\$2500 no salário líquido que será investido em fundos de investimento em ações, que tem alcançado um desempenho recorrente de 50% ao ano.

Calcule o valor da parcela do empréstimo, o valor futuro que terá o fundo e o número de meses necessário para que o custo do empréstimo alcance o rendimento do fundo (considerando o valor futuro em 24 meses).

OBS: considere que ambas as taxas se mantem constante no período.

Parcelas do empréstimo

Valor presente: $50.000,00$

Número de parcelas: 24

Taxa de juros: $i_a = 20\%$ a.a.

$$i_m = \left[(1+i_a)^{\frac{n_m}{n_a}} - 1\right] \times 100 = \left[(1+0,2)^{\frac{1}{12}} - 1\right] \times 100 \therefore i_m = 1,53\% \text{ a.m.}$$

Valor da parcela:

$$P = V_p \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = 50.000,00 \frac{(1+0,0153)^{24} \cdot 0,0153}{(1+0,0153)^{24} - 1} \therefore P = R\$2.505,19$$

Rendimento do fundo

Parcela: $R\$2.500,00$

Número de parcelas: 24

Rendimento: $i_a = 50\%$ a.a.

$$i_m = \left[(1+0,5)^{\frac{1}{12}} - 1\right] \times 100 \therefore i_m = 3,44\% \text{ a.m.}$$

Valor futuro:

$$V_f = P \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 2.500,00 \frac{(1+0,0344)^2 4 - 1}{0,0344} \therefore V_f = R\$90.932,68$$

Tempo de equilíbrio

Valor da parcela: $R\$2.505,19$

Taxa de juros: $i_a = 20\%$ a.a.

Valor futuro: $R\$90.932,68$

Número de parcelas:

$$V_f = P \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow 90.932,68 = 2.505,19 \frac{(1+1,2)^n - 1}{1,2} \therefore n = 29,135 \text{ m}$$

4.2 Termos antecipados

$$V_p = P(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \tag{3}$$

$$V_f = P(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{4}$$

A principal diferença entre antecipados e vencidos é a referência de tempo na qual se começa a incidir o juro/rendimento. Por isso da familiaridade entre as equações 1 com 3 e 2 com 4, com excessão de um termo extra que corrige a referência temporal.

Exemplo Uma empresa paga um bonus trimestral de R$2.500,00 aos funcionário que atingem uma certa meta de desempenho. Supondo que esse bônus seja aplicado hoje (e a cada bonificação trimestral) em um título de dívida privado que rende 0,75% ao mês, quanto tempo será necessário para alcançar o montante de R$20.000,00?

Tempo de equilíbrio
Valor da parcela: $R\$2.500,00$
Taxa de juros: $i_a = 0,75\%$ a.m.
$i_t = \left[(1+i_m)^{\frac{n_t}{n_m}} - 1\right] \times 100 = \left[(1+0,0075)^{\frac{3}{1}} - 1\right] \times 100 \therefore i_t = 2,27\%$ a.t.

Valor futuro: $R\$20.000,00$

Número de parcelas:
$$V_f = P\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow 20.000,00 = 2.500,00\frac{(1+0,00227)^n - 1}{1,2} \therefore n = 7,28 \text{ tri}$$

4.3 Carência inicial

Exemplo Foi contraído um empréstimo no valor de $R\$20.000,00$, com uma taxa de juros de $1,4889\%$ a.m. e carência de 5 meses para as prestações bimestrais no valor de $R\$2815,00$. Calcule o tempo necessário para quitar essa dívida.

Como as prestações são bimestrais e a carência é de 5 meses, devemos transferir o tempo focal para no mês 3 se formos trabalharmos com termos vencidos, ou para o mês 5 se formos trabalhar com termos antecipados.
Valor presente atual: $R\$2.815,00$
Valor da parcela: $R\$2.815,00$
Taxa de juros: $i_m = 1,4889\%$ a.m.

$$i_b = \left[(1+i_m)^{\frac{n_b}{n_m}} - 1\right] \times 100 = \left[(1+1,4889)^{\frac{2}{1}} - 1\right] \times 100 \therefore i_t = 3\% \text{ a.t.}$$

Termos vencidos
Valor presente no 3º mês:
$V_{p3} = (1+i)^n = (1+0,014889)^3 \therefore V_{p3} = R\$26.133,40$

Número de parcelas:

$$
\begin{aligned}
V_{p3} &= P\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \\
(1+i)^n \frac{V_{p3} \cdot i}{P} &= (1+i)^n - 1 \\
(1+i)^n \left(\frac{V_{p3} \cdot i}{P} - 1\right) &= -1 \\
(1+i)^n \left(\frac{P - V_{p3} \cdot i}{P}\right) &= 1 \\
(1+i)^n &= \left(\frac{P}{P - V_{p3} \cdot i}\right) \\
\ln(1+i)^n &= \ln\left(\frac{P}{P - V_{p3} \cdot i}\right) \\
n\ln(1+i) &= \ln\left(\frac{P}{P - V_{p3} \cdot i}\right) \\
n &= \frac{\ln\left(\frac{P}{P - V_{p3} \cdot i}\right)}{\ln(1+i)} \\
n &= \frac{\ln 1,38601801899106}{\ln 1,03} \\
n &= \frac{0,32643490139825000}{0,02955880224154440} \\
&\therefore \\
n &= 11,04 \text{ bimestres}
\end{aligned}
$$

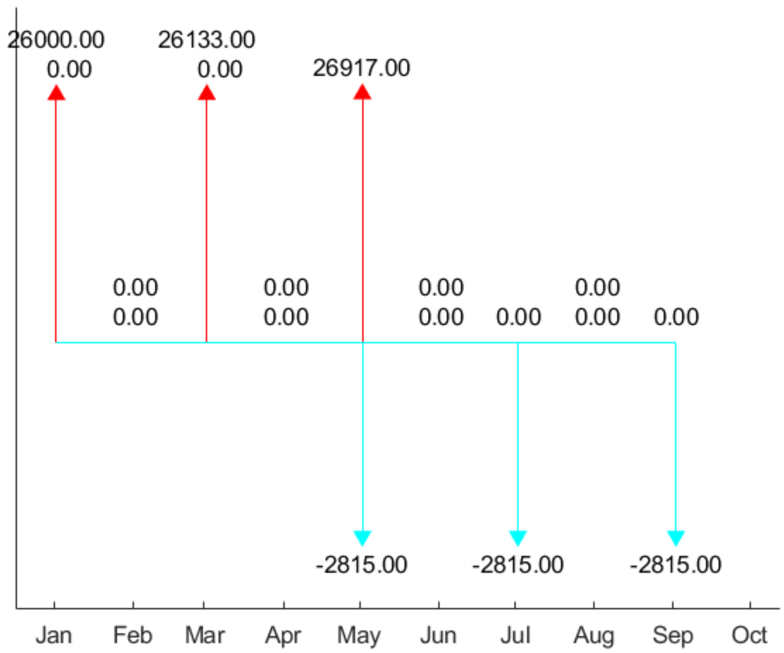
Termos antecipados
Valor presente no 5º mês:
$V_{p5} = (1+i)^n = (1+0,014889)^5 \therefore V_{p5} = R\$26.917,40$

Número de parcelas:

$$V_{p5} = P(1+i)\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow 26.917,40 = 2.815,00\frac{(1,03)^{n+1} \cdot 0,03}{(1,03)^n - 1} \therefore n = 11,04$$

Podemos notar que ambas as abordagens deram o mesmo resultado. O diagrama a seguir ajuda a ilustrar o que está ocorrendo.

Diagrama de fluxo de caixa considerando diferentes tempos focais



4.4 Carência final

Exemplo Um rapaz com exatos 28 anos tem o sonho de acumular a quantia de $R\$1.000.000,00$ até o dia de seu aniversário de 33 anos. No dia do seu aniversário ele fechou um contrato de prestação de serviços que duraria 3 anos, e decidiu montar uma estratégia de investimentos para alcançar seu objetivo. Depois de analisar diversas aplicações, colocou como meta uma taxa de rentabilidade semestral de $i = 15\%$. Calcule o valor que deverá ser aplicado mensalmente para que ele alcance a meta no dia exato do seu aniversário de 33 anos.
OBS: desconsidere a volatilidade da carteira.

Como o contrato tem durabilidade de apenas 3 anos, a princípio nada garante que nos últimos 2 anos será possível realizar novos aportes. Dessa forma, temos uma carência nos 24 meses finais, ou seja, devemos transferir o tempo focal do target da estratégia para para no mês 36.

Valor futuro target: $R\$1.000.000,00$
Taxa de juros: $i_s = 15\%$ a.s.

$$i_m = \left[(1+i_s)^{\frac{n_m}{n_s}} - 1\right] \times 100 = \left[(1+0,15)^{\frac{1}{6}} - 1\right] \times 100 \therefore i_m = 2,36\% \text{ a.m.}$$

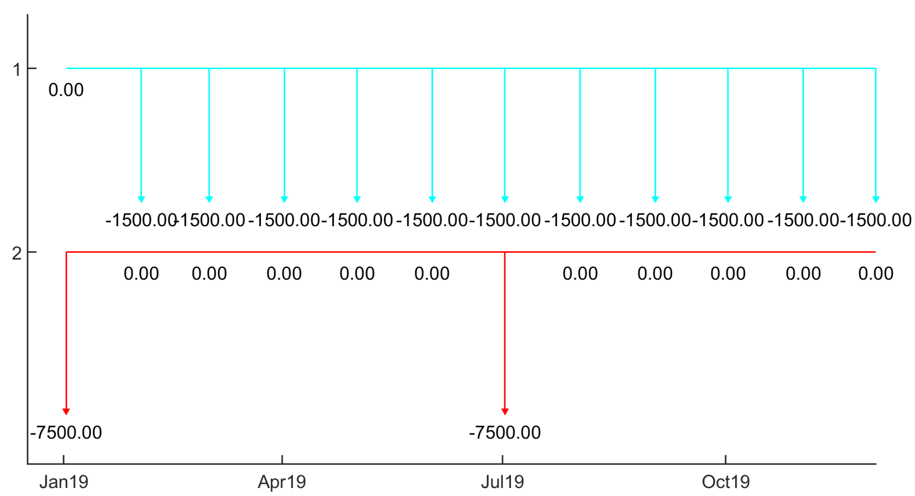
Termos vencidos
Valor futuro pré-carência: $\dfrac{V_{f36}}{(1+i)^n} = \dfrac{R\$1.000.000,00}{(1+24)^{0,0236}} = R\$571.753,25$

Número de parcelas:
$P = V_f \dfrac{i}{(1+i)^n - 1} = R\$571.753,25 \dfrac{0,0236}{(1+0,0236)^{36} - 1} \therefore P = R\$10.261,94$

4.5 Prestações intermediárias

Exemplo: Foi contraído um empréstimo para aquisição de residência a ser quitado em 5 anos, com parcelas mensais de R\$1.500,00 e taxa de juros de 25% ao ano. No ato da compra será paga uma entrada de R\$50.000,00, além da primeira parcela de uma antecipação com parcelas semestrais de R\$7.500,00 e taxa de juros de 20% ao ano. Calcule o valor atual do imóvel e o quanto ele estará valendo no período em que for quitado (considere a taxa de juros mensal).

Diagrama de fluxo de caixa de cada parcela



Prestações mensais (termos vencidos):
Valor da parcela: $R\$1.500,00$
Número de parcelas: 60 meses
Taxa de juros: $i_a = 25\%$ a.a.

$$i_m = \left[(1+i_a)^{\frac{n_m}{n_a}} - 1\right] \times 100 = \left[(1+0,25)^{\frac{1}{12}} - 1\right] \times 100 \therefore i_m = 1,88\% \text{ a.m.}$$

Valor presente (mensal):

$$V_p = P\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = R\$1.500,00\frac{(1+0,0188)^{60} - 1}{(1+0,0188)^{60} \cdot 0,0188} \therefore V_p = R\$71.640,52$$

Prestações semestrais (termos antecipados):
Valor da parcela: $R\$7.500,00$
Número de parcelas: 10 semestres
Taxa de juros: $i_a = 25\%$ a.a.

$$i_s = \left[(1+i_a)^{\frac{n_s}{n_a}} - 1\right] \times 100 = \left[(1+0,25)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \times 100 \therefore i_s = 9,54\% \text{ a.s.}$$

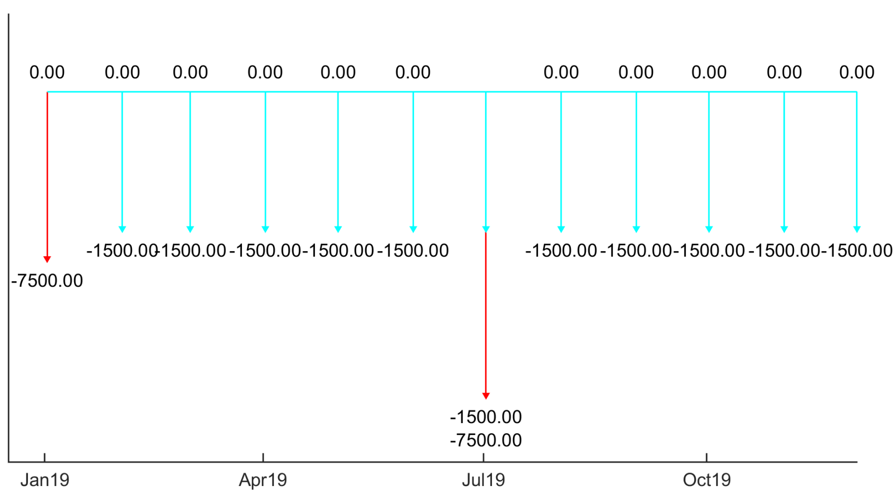
Valor presente (semestral):

$$V_p = P(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = 7.500(1,095)\frac{(1,095)^{10} - 1}{(1,095)^{10} \cdot 0,095} \therefore V_p = R\$51.485,90$$

Valor presente (total):
$V_p = V_e + V_{p_m} + V_{p_s} = R\$50.000,00 + R\$71.640,52 + R\$51.485,90 = R\$173.126,42$

Valor futuro:
$V_f = V_p \cdot (1+i)^n = R\$173.126,42 \cdot (1+0,095)^6 0 \therefore V_f = R\$528.339,90$

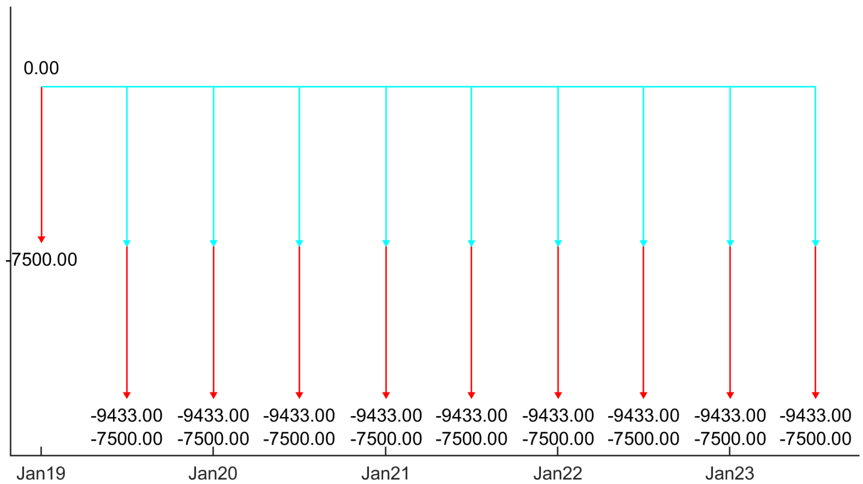
Diagrama de fluxo de caixa integrado



Podemos notar que ambos os diagramas estão representando apenas o primeiro ano, pois representar todo o príodo deixaria o diagrama bastante poluído. Para representar o diagrama semestral, devemos lembrar que o efeito da contribuição mensal em um semestre segue uma estrutura de termos vencidos.

$$V_p = P\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = R\$1.500,00\frac{(1+0,0188)^6 - 1}{(1+0,0188)^6 \cdot 0,0188} \therefore V_p = R\$9.433,03$$

Diagrama de fluxo de caixa semestral



4.6 Prestações alternadas

Exemplo: A partir do mês que vêm será paga uma indenização referente a uma certa pendência judicial. Os depósito serão mensais, durante um período de 9 meses, porém o valor das parcelas seguirá uma regra trimestral. No 1º mes será depoisitado R$200,00, no 2º mês será depositado R$250,00 e no terceiro mês será depoisitado R$300,00, repetindo o ciclo a partir de então. Considerando uma taxa de juros mensal de 1,32%, calcule o valor total a ser resgatado.

Número de parcelas: 3
Taxa de juros: $i_m = 1,32\%$ a.m.

$$i_t = \left[(1+i_m)^{\frac{n_t}{n_m}} - 1\right] \times 100 = \left[(1+0,0132)^{\frac{3}{1}} - 1\right] \times 100 \therefore i_t = 4,01\% \text{ a.t.}$$

Prestação trimestral T_1 (R$200,00)

$$V_{p_1} = P_1 \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = R\$200,00 \frac{(1+0,0401)^3 - 1}{(1+0,0401)^3 \cdot 0,0401} \therefore V_{p_1} = R\$554,89$$

Prestação trimestral T_2 (R$250,00)

$$V_{p_2} = P_2 \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = R\$250,00 \frac{(1+0,0401)^3 - 1}{(1+0,0401)^3 \cdot 0,0401} \therefore V_{p_2} = R\$693,61$$

Prestação trimestral T_3 (R$300,00)

$$V_{p_3} = P_3 \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = R\$300,00 \frac{(1+0,0401)^3 - 1}{(1+0,0401)^3 \cdot 0,0401} \therefore V_{p_3} = R\$832,33$$

Nesse problema é importante notar que estamos trabalhando com termos vencidos referentes a uma taxa de juros trimestral. Dessa foma, ocorre um pequeno problema de referência nas parcelas T_1 e T_2, visto que suas primeiras ocorrências antecedem um trimestre.

Por exemplo, supondo-se que nosso tempo focal inicial é janeiro, então a primeira ocorrência de T_1 é em fevereiro. No entanto, ela está se referindo a um período focal que está um trimestre no passado, ou seja, novembro do ano anterior. Para corrigir esse problema, basta recapitalizar o montante encontrado, com o período restante até se atingir o tempo focal inicial estabelecido.

Prestação trimestral T_1 corrigida

$$V_{p_1}^* = V_{p_1} \cdot (1 + i_m)^2 = R\$554,89 \cdot (1 + 0,01032)^2 \therefore V_{p_1}^* = R\$569,63$$

Prestação trimestral T_2 corrigida

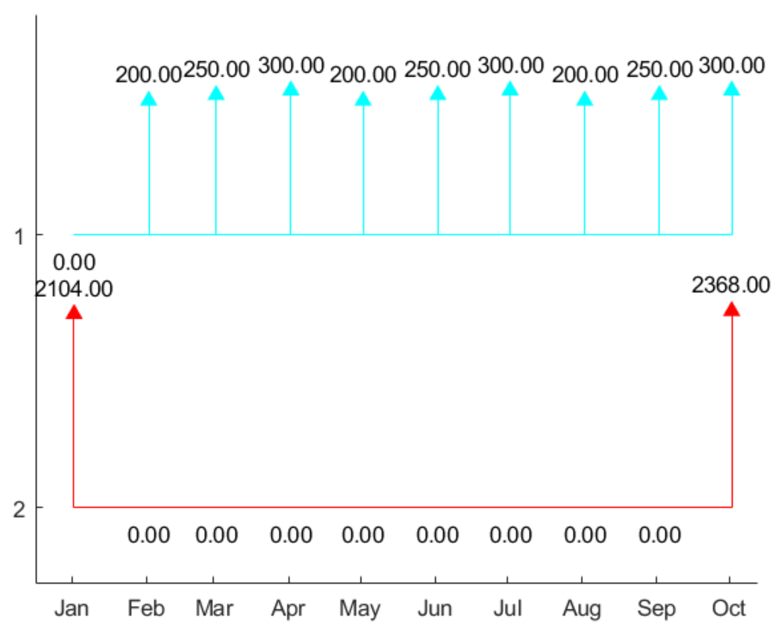
$$V_{p_2}^* = V_{p_2} \cdot (1 + i_m)^2 = R\$693,61 \cdot (1 + 0,01032)^1 \therefore V_{p_1}^* = R\$702,76$$

Valor presente total

$$V_p = V_{p_1}^* + V_{p_2}^* + V_{p_3} = R\$569,63 + R\$702,76 + R\$832,33 \therefore V_p = R\$2.104,73$$

Valor futuro

$$V_f = V_P \cdot (1 + i)^n = R\$2.104,73 \cdot (1 + 0,0401)^3 \therefore V_f = R\$2.368,38$$



4.7 Taxa

Exemplo: Considere um modelo de investimento no qual são realizados aportes mensais de R$500,00 reais, buscando ao final de 5 anos, um capital acumulado de R$50.000,00. Calcule a taxa de juros necessária para atingir o objetivo.

Valor da parcela: $R\$500,00$
Número de parcelas: 60 meses
Valor futuro: $R\$50.000,00$
Taxa: $V_f = P\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow R\$50.000,00 = R\$500,00\dfrac{(1+i)^{60}-1}{i}$

Simplificando a parte numérica, ficamos com a seguinte expressão

$$\frac{(1+i)^{60}-1}{i} = 100$$

cuja solução analítica é extremamente complexa (se não íniviável). Poderíamos fazer tentativas aleatórias manuais, mas além de tornar o processo exaustivo, o erro propagado pode ser não desprezível.

Uma forma de resolver esse problema seria utilizar aproximações numéricas ou algum algoritmo de otimização. É proposta a utilização de uma ferramenta estatística baseada em teste de hipótese, disponível na plataforma Open Source "LibreOffice". Portanto, primeiramente precisamos modelar nosso problema no ambiente.

SOMA | =C3*((1+E3)^D3-1)/E3

	A	B	C	D	E
1					
2		Vf	P	n	i
3		=C3*((1+E3)^D3-1)/E3	R$ 500,00	60	

Note que o modelo implementado é valor futuro de termos vencidos 2.

$$V_f = P\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 500\frac{(1+i)^{60}-1}{i}$$

Supondo que a célula $E3$ foi preenchida com uma taxa de 1%, teremos:

E3 | 1%

	A	B	C	D	E
1					
2		Vf	P	n	i
3		R$ 40.834,83	R$ 500,00	60	1,00%

Testando na solução analítica, podemos verificar que o modelo está funcionando corretamente.

$$V_f = R\$500,00\frac{(1+0,01)^{60}-1}{0,01} = R\$40.834,83$$

Para utilizar a ferramenta de otimização, basta seguir as instruções:

1. Clique na guia ferramentas no menu principal, e selecione a ferramenta "Atingir Meta...".

2. No menu atingir meta, selecione o seguinte:

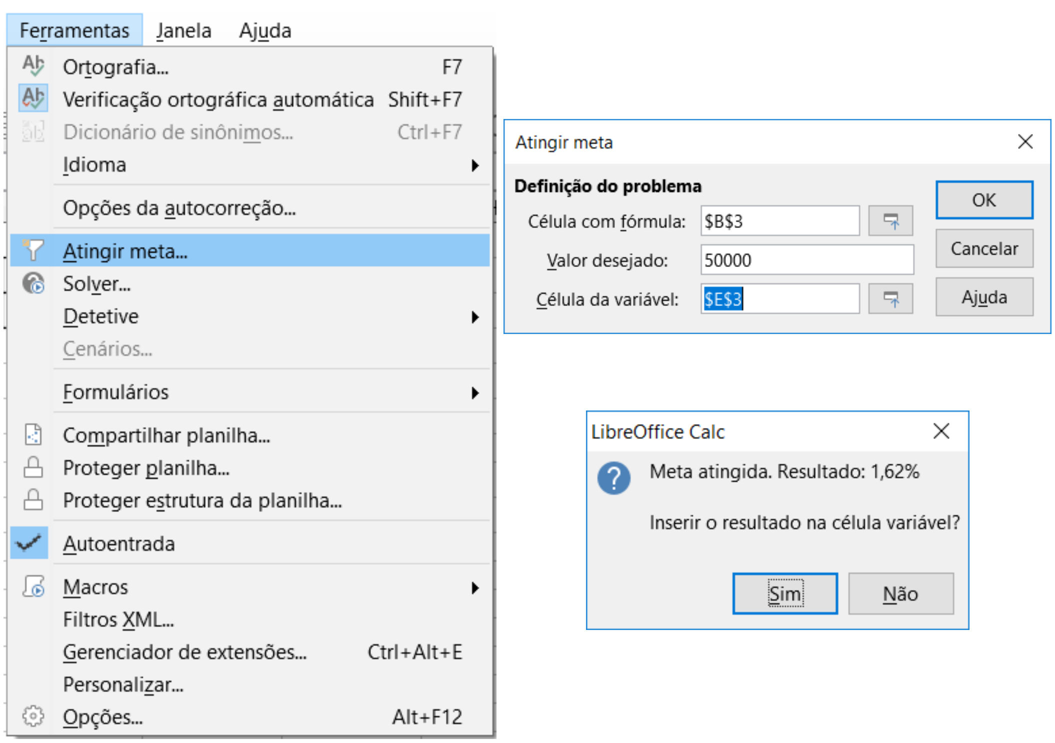
   Célula com fórmula: Selecione a célula $B3$ que possuí o modelo alvo que queremos otimizar (V_f nesse caso).

   Valor desejado: Escreva o valor a ser buscado (R$50.000,00 nesse caso).

   Célula da variável: Selecione a célula $E3$ que possúi o parâmetro que o algoritmo vai variar para tentar atingir o alvo (i nesse caso).

3. Após escolher os parâmetros adequados, clique em "OK"e espere o calculo terminar.

4. Depois de atingida a meta, clique em "Sim"para inserir o valor de i e finalizar o modelo.



E3 | f_x Σ = | 1,61502659978316%

	A	B	C	D	E
1					
2		Vf	P	n	i
3		R$ 50.000,00	R$ 500,00	60	1,62%

Testando na solução analítica, verificamos que a otimização ocorreu corretamente. Note que apesar da ferramenta apresentar a taxa $i = 1,62\%$ com arredondamento de duas casas, internamente estão sendo consideradas muitas casas decimas. Isso é fundamental para que a solução tenha uma convergência adequada.

$$V_f = R\$500,00\frac{(1+0,01615)^{60}-1}{0,01615} \approx R\$49.999,55$$

5 Sistemas de amortização

5.1 SAC - Sistema de Amortização Constante

O sistema "SAC"é uma metodologia onde o valor amortizado mensalmente é constante. Dessa forma, tanto as prestações quanto os juros são decrescentes, tornando-o um sistema muito utilizado em financiamento de imóveis.

Para fazer uma simulação, é necessário saber:

- V_t - Valor do financiamento;
- n - Número de prestações;
- i - Taxa de juros.

Exemplo: Foi feita a simulação de um financiamento seguindo o sistema SAC, no valor total de R$50.000,00 com uma taxa de juros de $0,45\%$ ao mes, para se quitar em 10 parcelas. Construa a tabela correpondente:

5.1.1 Amortização

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R$ 50.000,00	0,450%
4	1	=F3/10				

$$A_n = \frac{V_{n-1}}{n} = \frac{R\$50.000,00}{10} \therefore A_n = R\$5.000,00$$

5.1.2 Juros

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R$ 50.000,00	0,450%
4	1	R$ 5.000,00	=F3*G3			

$$J_n = V_{n-1} \cdot i = R\$50.000,00 \cdot 0,0045 \therefore J_n = R\$225,00$$

5.1.3 Prestação

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R$ 50.000,00	0,450%
4	1	R$ 5.000,00	R$ 225,00	=C4+D4		

$$P_n = A_n + J_n = R\$5.000,00 + R\$225,00 \therefore P_n = R\$5.225,00$$

5.1.4 Saldo devedor

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R$ 50.000,00	0,450%
4	1	R$ 5.000,00	R$ 225,00	R$ 5.225,00	=F3-C4	

$$V_n = V_{n-1} - A_n = R\$50.000,00 - R\$5.000,00 \therefore V_n = R\$45.000,00$$

5.1.5 Algoritmo de recorrência

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R$ 50.000,00	0,450%
4	1	R$ 5.000,00	R$ 225,00	R$ 5.225,00	R$ 45.000,00	
5	2	R$ 5.000,00	R$ 202,50	R$ 5.202,50	R$ 40.000,00	

5.2 Price - Sistema de Amortização Francês

O sistema "PRICE"é uma metodologia onde a prestação paga mensalmente é constante. Dessa forma, cada prestação é composta por uma parte referente à amortização da dívida e outra parte referente aos juros.

Para fazer uma simulação, é necessário saber:

- V_t - Valor do financiamento;
- P - Valor da prestação
- n - Número de prestações;
- i - Taxa de juros.

Exemplo: Foi feita a simulação de um financiamento seguindo a metodologia PRICE, no valor total de R\$50.000,00 com uma taxa de juros de $0,45\%$ ao mes, para se quitar em 10 parcelas. Construa a tabela correpondente:

5.2.1 Parcela - termos vencidos

Valor presente: $V_p = R\$50.000,00$

Número de parcelas: $n = 10$

Taxa de juros: $i = 0,45$ a.m.

Valor da parcela:

$$P = V_p \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = R\$50.000,00 \frac{(1+0,0045)^{10} \cdot i}{(1+0,0045)^{10} - 1} \therefore P = R\$5.124,58$$

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R\$ 50.000,00	0,450%
4	1			R\$ 5.124,58		

5.2.2 Juros

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R\$ 50.000,00	0,450%
4	1		=F3*G3	R\$ 5.124,58		

$$J_n = V_{n-1} \cdot i = R\$50.000,00 \cdot 0,0045 \therefore J_n = R\$225,00$$

5.2.3 Amortização

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R$ 50.000,00	0,450%
4	1	=E4-D4	R$ 225,00	R$ 5.124,58		

$$A_n = P_n - J_n = R\$5.124,58 - R\$225,00 \therefore A_n = R\$4.899,58$$

5.2.4 Saldo devedor

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R$ 50.000,00	0,450%
4	1	R$ 4.899,58	R$ 225,00	R$ 5.124,58	F3-C4	

$$V_n = V_{n-1} - A_n = R\$50.000,00 - R\$4.899,58 \therefore V_n = R\$45.100,42$$

5.2.5 Algoritmo de recorrência

A1	B	C	D	E	F	G
2	Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor	Juros
3					R$ 50.000,00	0,450%
4	1	R$ 4.899,58	R$ 225,00	R$ 5.124,58	R$ 45.100,42	
5	2	R$ 4.921,63	R$ 202,95	R$ 5.124,58	R$ 40.178,79	

5.3 Comparação entre SAC e PRICE

É possível perceber que no sistema SAC o valor da prestação começa mais alta e vai diminuindo gradativamente, conforme o saldo devedor vai ficando menor.

Já no sistema PRICE, como a prestação incorpora uma parcela de amortização e outra parcela de juros, a amortização so começa a ser mais efetiva conforme os juros vai diminuindo.

Nesse exemplo, foi possível verificar que apesar do problema apresentar os mesmos requisitos iniciais, no sistema SAC houve uma menor incidência de juros. Apesar de sistema PRICE trazer certa capacidade de planejamento, afinal o valor pago é sempre o mesmo, no final das contas quanto se utiliza esse sistema, está se pagando um valor de juros superior.

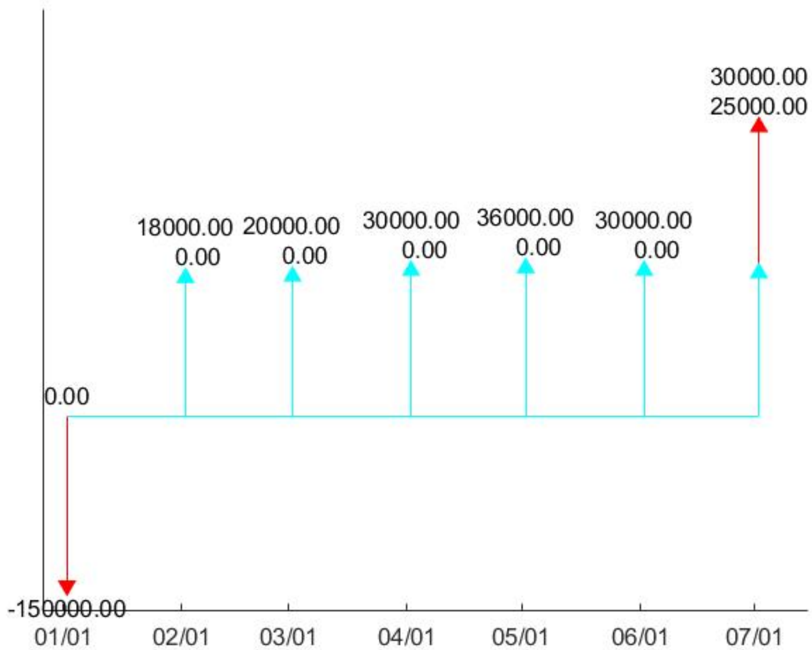
Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor
				R$ 50.000,00
1	R$ 5.000,00	R$ 225,00	R$ 5.225,00	R$ 45.000,00
2	R$ 5.000,00	R$ 202,50	R$ 5.202,50	R$ 40.000,00
3	R$ 5.000,00	R$ 180,00	R$ 5.180,00	R$ 35.000,00
4	R$ 5.000,00	R$ 157,50	R$ 5.157,50	R$ 30.000,00
5	R$ 5.000,00	R$ 135,00	R$ 5.135,00	R$ 25.000,00
6	R$ 5.000,00	R$ 112,50	R$ 5.112,50	R$ 20.000,00
7	R$ 5.000,00	R$ 90,00	R$ 5.090,00	R$ 15.000,00
8	R$ 5.000,00	R$ 67,50	R$ 5.067,50	R$ 10.000,00
9	R$ 5.000,00	R$ 45,00	R$ 5.045,00	R$ 5.000,00
10	R$ 5.000,00	R$ 22,50	R$ 5.022,50	R$ 0,00
Total	R$ 50.000,00	R$ 1.237,50	R$ 51.237,50	SAC

Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo devedor
				R$ 50.000,00
1	R$ 4.899,58	R$ 225,00	R$ 5.124,58	R$ 45.100,42
2	R$ 4.921,63	R$ 202,95	R$ 5.124,58	R$ 40.178,79
3	R$ 4.943,78	R$ 180,80	R$ 5.124,58	R$ 35.235,01
4	R$ 4.966,03	R$ 158,56	R$ 5.124,58	R$ 30.268,98
5	R$ 4.988,37	R$ 136,21	R$ 5.124,58	R$ 25.280,61
6	R$ 5.010,82	R$ 113,76	R$ 5.124,58	R$ 20.269,79
7	R$ 5.033,37	R$ 91,21	R$ 5.124,58	R$ 15.236,42
8	R$ 5.056,02	R$ 68,56	R$ 5.124,58	R$ 10.180,40
9	R$ 5.078,77	R$ 45,81	R$ 5.124,58	R$ 5.101,63
10	R$ 5.101,63	R$ 22,96	R$ 5.124,58	-R$ 0,00
Total	R$ 50.000,00	R$ 1.245,83	R$ 51.245,83	PRICE

6 Fluxo de caixa

$$VPL = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+i)^j} - FC_0$$

Exemplo: Suponha que uma empresa pretende adquirir uma máquina no valor de $R\$150.000,00$ para realizar um certo processo, e vende-la logo em seguida por aproximadamente $R\$30.000,00$. A lucratividade esperada para o processo é expresso pelas linhas azuis, enquanto as linhas vermelhas representam o valor de aquisição e liquidação.



$$
\begin{aligned}
VPL &= \frac{R\$18.000,00}{(1+0,16)^1} + \frac{R\$20.000,00}{(1+0,16)^2} + \frac{R\$30.000,00}{(1+0,16)^3} + \frac{R\$36.000,00}{(1+0,16)^4} \\
&\quad + \frac{R\$30.000,00}{(1+0,16)^5} + \frac{R\$25.000,00 + R\$30.000,00}{(1+0,16)^6} - R\$150.000,00 \\
VPL &= \frac{R\$18.000,00}{1,16} + \frac{R\$20.000,00}{1,3456} + \frac{R\$30.000,00}{1,560896} + \frac{R\$36.000,00}{1,81063936} \\
&\quad + \frac{R\$30.000,00}{2,100341658} + \frac{R\$55.000,00}{2,436396323} - R\$150.000,00 \\
VPL &= R\$15517,24 + R\$14863,26 + R\$19219,73 + R\$19882,48 \\
&\quad + R\$14283,39 + R\$22574,32 - R\$150.000,00 \\
VPL &= R\$106.340,42 - R\$150.000,00 \\
&\therefore \\
VPL &= -R\$43.659,58
\end{aligned}
$$