IFSP
Instituto Federal São Paulo
Curso de Licenciatura em Matemática

Dados de Identificação	
Professores:	Eduardo Palhares Júnior
Disciplina:	MAT111 - Matemática
Tema:	Funções
Turma:	1º ano - Matutino

Gabarito P2

1 Questão

$$x^2 + 2mx + \left(m^2 - 3m + 5\right) = 0$$

Aplicando Bhaskara

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2m \pm \sqrt{4m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 3m + 5)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2m \pm \sqrt{4m^2 - 4m^2 - 12m + 20}}{2} \\ &= \frac{-2m \pm \sqrt{-12m + 20}}{2} \end{aligned}$$

Da condição de existência das raizes, temos:

$$\Delta > 0 \Rightarrow -12m + 20 > 0 \therefore m < \frac{5}{3}$$

2 Questão

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

Aplicando Bhaskara

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

a Soma das raízes

$$x_1 + x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} + \frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{5 + \underline{\sqrt{29}} + 5 - \underline{\sqrt{29}}}{2} = \frac{10}{2} \therefore x_1 + x_2 = 5$$

b Produto das raízes

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}\frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{5^2 + \underline{5\sqrt{29}} - \underline{5\sqrt{29}} - \left(\sqrt{29}\right)^2}{4} = \frac{25 - 29}{4} \therefore x_1 \cdot x_2 = -1$$

c Soma das inversas

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1}\frac{x_2}{x_2} + \frac{1}{x_2}\frac{x_1}{x_1} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{5}{-1} \therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -5$$

3 Questão

$$kx^2 + 2kx - 3k = k\left(x^2 + 2x - 3\right)$$

Aplicando Bhaskara

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \langle \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

a Mínimo

$$\frac{-\Delta}{4a} = -20 \Rightarrow \frac{-\left((2k)^2 - 4 \cdot k \cdot (-3k)\right)}{4 \cdot k} = \frac{-\left(4k^2 + 12k^2\right)}{4k} = -4k = -20 \therefore k = 5$$

b Máximo

$$\frac{-\Delta}{4a} = 12 \Rightarrow \frac{-\left((2k)^2 - 4 \cdot k \cdot (-3k)\right)}{4 \cdot k} = \frac{-\left(4k^2 + 12k^2\right)}{4k} = -4k = 12 \therefore k = -3$$

c Função f sempre positiva

$$S = \left\{ f(x) > 0 \middle| \begin{matrix} \text{se } k > 0 \Rightarrow x < -3 \text{ ou } x > 1 \\ \text{se } k < 0 \Rightarrow -3 < x < 1 \end{matrix} \right\}$$

d Função f sempre negativa

$$S = \left\{ f(x) < 0 \middle| \begin{matrix} \text{se } k > 0 \Rightarrow -3 < x < 1 \\ \text{se } k < 0 \Rightarrow x < -3 \text{ ou } x > 1 \end{matrix} \right\}$$

4 Questão

$$\begin{cases} x \cdot y = 32 & (1) \\ x + 3y = 28 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo 2, temos:

$$x + 3y = 28 \Rightarrow x = 28 - 3y \quad (3)$$

Substituindo 3 em 1, temos:

$$(28 - 3y)y = 32 \Rightarrow -3y^2 + 28y - 32 = 0 \quad (4)$$

Aplicando Bhaskara em 4

$$y = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-32)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 384}}{6} = \frac{28 \pm \sqrt{400}}{6} = \frac{28 \pm 20}{6} \langle \begin{matrix} y_1 = 8 \\ y_2 = \frac{4}{3} \end{matrix}$$

Substituindo $y = 8$ em 1, temos $x \cdot 8 = 32 \Rightarrow x = 4$. Portanto, temos $(4, 8)$.
Substituindo $y = \frac{4}{3}$ em 1, temos $x \cdot \frac{4}{3} = 28 \Rightarrow x = 24$. Portanto, temos $\left(24, \frac{4}{3}\right)$

5 Questão

$$\begin{cases} f(x): x^2 - 2x - 8 = 0 & (5) \\ g(x): \quad 2x + 2 = 0 & (6) \end{cases}$$

Aplicando Bhaskara em 5

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{3} = \frac{2 \pm 6}{2} \langle \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{matrix}$$

Calculando o vértice de $f(x)$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} \therefore x_v = 1$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4 \cdot 1} \therefore y_v = -9$$

Resolvendo 6, temos:

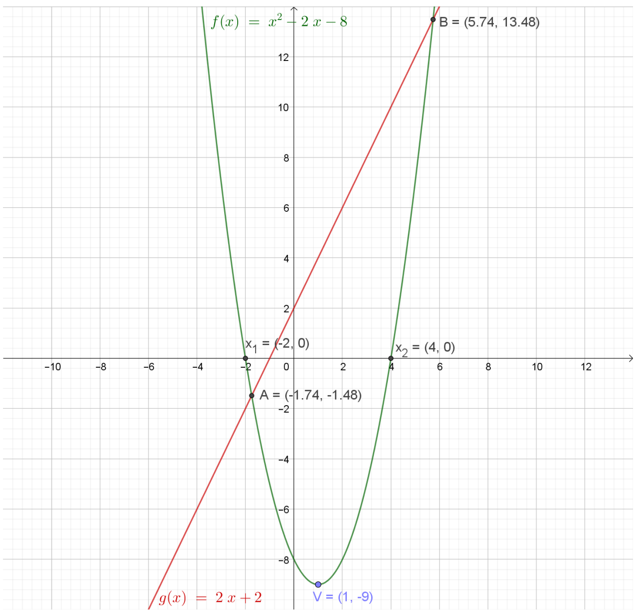
$$2x + 2 = 0 \Rightarrow x_r = -1$$

Para fazer o estudo dos sinais, utilizaremos o seguinte diagrama

Tabela 1: Diagrama de sinais

		-2		-1		4	
f(x)	+		-		-		+
g(x)	-		-		+		+
	-		+		-		+

Podemos ainda traçar o gráfico de $f(x)$ e $g(x)$.



a f(x)/g(x) positivo

Do diagrama 1, temos:

$$S = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \,|{-2} \leq x < -1 \text{ ou } x \geq 4 \right\}$$

b g(x)/f(x) negativo

Do diagrama 1, temos:

$$S = \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} < 0 \,|x < -2 \text{ ou } -1 < x < 4 \right\}$$

c

$$x^2 - 2x - 8 = 2(2x+2) \Rightarrow x^2 - 6x - 12 = 0$$

Aplicando Bhaskara

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36+48}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{21}}{2} \langle \begin{matrix} x_1 = 3 - \sqrt{21} \\ x_2 = 3 + \sqrt{21} \end{matrix}$$

d

$$x^2 - 2x - 8 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 4x - 10 = 0$$

Aplicando Bhaskara

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} \langle \begin{matrix} x_1 = 2 - \sqrt{14} \\ x_2 = 2 + \sqrt{14} \end{matrix}$$

Aplicando x_1 e x_2 em $f(x)$ ou $g(x)$, temos justamente os pares ordenados indicados no gráfico pelos pontos A e B.

$$\begin{cases} (x_1, y_1) = \left(2 - \sqrt{14}, -1.48\right) \\ (x_2, y_2) = \left(2 + \sqrt{14}, 13.48\right) \end{cases}$$

ou seja, pelo gráfico, fica claro que

$$S = \left\{ f(x) \leq g(x) \,\middle|\, 2 - \sqrt{14} < x < 2 + \sqrt{14} \right\}$$

e

Combinando o resultado obtido no item c com o gráfico, fica claro que

$$S = \left\{ f(x) \leq g(x) \,\middle|\, x \leq 3 - \sqrt{21} \text{ ou } x > 3 + \sqrt{21} \right\}$$

Boa Prova!!!